CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015

FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA”)

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA
ARKUSZE
MMA-P1

SIERPIEŃ 2015

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	A	B	A	D	B	B	D	A	A	C	D	B	C	C	D	D	B	A	C	A	C	C	B	D	B

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. *(2 pkt)*

Rozwiąż równanie $8x^3+8x^2-3x-3=0$.

I sposób rozwiązania (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów

$$8x^2(x+1)-3(x+1)=0 \qquad \text{lub} \qquad x\left(8x^2-3\right)+8x^2-3=0,$$

$$\left(8x^2-3\right)(x+1)=0$$

$$\left(2\sqrt{2}x-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}x+\sqrt{3}\right)(x+1)=0.$$

Stąd $x=\frac{\sqrt{6}}{4}$ lub $x=-\frac{\sqrt{6}}{4}$ lub $x=-1$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu, np.: $\left(8x^2-3\right)(x+1)$, przy czym postać ta musi być otrzymana w sposób poprawny, i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=\frac{\sqrt{6}}{4}$ lub $x=-\frac{\sqrt{6}}{4}$ lub $x=-1$.

II sposób rozwiązanie (metoda dzielenia)

Stwierdzamy, że liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu $8x^3+8x^2-3x-3$. Dzielimy wielomian przez dwumian $x+1$. Otrzymujemy iloraz $8x^2-3$. Zapisujemy równanie w postaci $\left(8x^2-3\right)(x+1)=0$. Stąd $\left(2\sqrt{2}x-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}x+\sqrt{3}\right)(x+1)=0$, czyli $x=\frac{\sqrt{6}}{4}$ lub $x=-\frac{\sqrt{6}}{4}$ lub $x=-1$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy podzieli wielomian $8x^3+8x^2-3x-3$ przez dwumian $x+1$, otrzyma iloraz $8x^2-3$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=\frac{\sqrt{6}}{4}$ lub $x=-\frac{\sqrt{6}}{4}$ lub $x=-1$.

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $5x^2 - 45 \le 0$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania:

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $5x^2 - 45$:

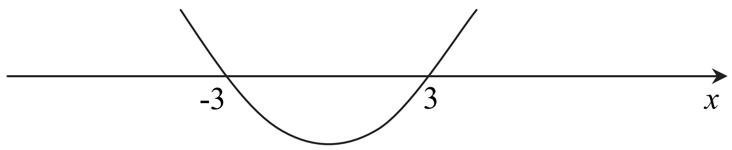
- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ lub $5(x-3)(x+3)$

albo

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu a następnie stosujemy wzory na pierwiastki:
  $\Delta = 0 - 4 \cdot 5 \cdot (-45) = 30^2$, $x_1 = \frac{0+30}{10} = 3$, $x_2 = \frac{0-30}{10} = -3$.

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $-3 \le x \le 3$ lub $\langle -3, 3\rangle$ lub $x \in \langle -3, 3\rangle$, np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji $f(x) = 5x^2 - 45$.



Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $5(x-3)(x+3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = 5x^2 - 45$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy:

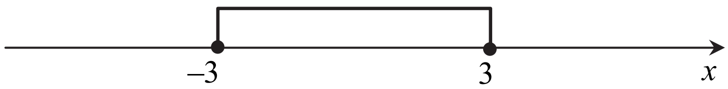
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $-3 \le x \le 3$ lub $\langle -3, 3\rangle$ lub $x \in \langle -3, 3\rangle$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $-3 \le x \le 3$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ i zapisze, np. $x \in \langle -3, -3 \rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \langle 3, -3 \rangle$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losowo wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy liczbę podzielną przez 9 lub podzielną przez 12.

Rozwiązanie

Zbiór zdarzeń elementarnych Ω zawiera 90 liczb naturalnych dwucyfrowych. Jest to model klasyczny. Wśród tych liczb jest osiem liczb podzielnych przez 9, ale nie przez 12, sześć liczb podzielnych przez 12, ale nie przez 9, oraz dwie liczby podzielne zarówno przez 9 jak i przez 12. Zatem $|A| = 8+6+2 = 16$. Stąd $P(A) = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy poda

- liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 90$

albo

- liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 16$

albo

- wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A:
  12, 18, 24, 27, 36, 45, 48, 54, 60, 63, 72, 81, 84, 90, 96, 99

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy i zapisze, że $P(A) = \frac{16}{90}$.

Uwagi

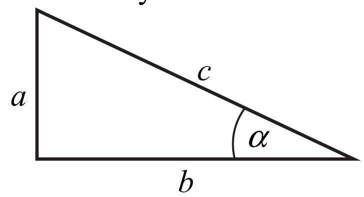
1. Jeżeli otrzymany wynik końcowy jest liczbą większa od 1, to zdający otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający poda jedynie $P(A) = \frac{16}{90}$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Kąt α jest ostry i spełnia równość $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{7}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

I sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia.



Korzystając z definicji funkcji tangens w trójkącie prostokątnym, lewą stronę równości $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{7}{2}$ możemy zapisać, a następnie przekształcić następująco:

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{c^2}{ab}.$$

Z drugiej strony zauważmy, że szukane wyrażenie $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ jest równe $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c^2}$.

Ponieważ $\frac{c^2}{ab} = \frac{7}{2}$, więc $\frac{ab}{c^2} = \frac{2}{7}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy wykorzysta definicje lub własności funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym, doprowadzi wyrażenie $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ do postaci $\frac{c^2}{ab}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy i zapisze, że wartość szukanego wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ jest równa $\frac{2}{7}$.

II sposób rozwiązania

Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$, więc z równości $\frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{7}{2}$ wynika, że szukany iloczyn $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ przyjmuje wartość $\frac{2}{7}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze

- $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

albo

- $\frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**

gdy obliczy i zapisze, że wartość szukanego wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ równa się $\frac{2}{7}$.

III sposób rozwiązania

Ponieważ α jest kątem ostrym, więc $\mathrm{tg}\,\alpha>0$ i równość $\mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{7}{2}$ możemy zapisać w postaci

$$\mathrm{tg}^2\alpha-\frac{7}{2}\mathrm{tg}\alpha+1=0.$$

Równanie powyższe ma dwa rozwiązania:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{7+\sqrt{33}}{4},\ \mathrm{tg}\alpha=\frac{7-\sqrt{33}}{4}.$$

Gdy $\mathrm{tg}\alpha=\frac{7+\sqrt{33}}{4}$, to $\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{98+14\sqrt{33}}}$ i $\sin\alpha=\sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{14}}$. Wtedy

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha==\sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{14}}\cdot\frac{4}{\sqrt{98+14\sqrt{33}}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{14}\cdot\frac{16}{98+14\sqrt{33}}}=\sqrt{\frac{16\left(7+\sqrt{33}\right)}{14\cdot14\left(7+\sqrt{33}\right)}}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}.$$

Gdy zaś $\mathrm{tg}\alpha=\frac{7-\sqrt{33}}{4}$, to $\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{98-14\sqrt{33}}}$ i $\sin\alpha=\sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{14}}$. Wtedy

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha==\sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{14}}\cdot\frac{4}{\sqrt{98-14\sqrt{33}}}=\sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{14}\cdot\frac{16}{98-14\sqrt{33}}}=\sqrt{\frac{16\left(7-\sqrt{33}\right)}{14\cdot14\left(7-\sqrt{33}\right)}}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**

gdy zapisze, że równanie $\mathrm{tg}^2\alpha-\frac{7}{2}\mathrm{tg}\alpha+1=0$ ma dwa rozwiązania: $\mathrm{tg}\alpha=\frac{7+\sqrt{33}}{4}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{7-\sqrt{33}}{4}$, a ponadto w jednym przypadku obliczy wartość $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**

gdy obliczy i zapisze, że wartość szukanego wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ równa się $\frac{2}{7}$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy jedną z wartości $\mathrm{tg}\alpha$, np.: $\mathrm{tg}\alpha=\frac{7-\sqrt{33}}{4}$, poda jej wartość przybliżoną 0,3139, odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta $\alpha\approx17^\circ$ oraz przybliżone wartości $\sin\alpha\approx0,2924$, $\cos\alpha\approx0,9563$ i na tej podstawie obliczy przybliżoną wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\approx0,2924\cdot0,9563\approx0,2762$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 30. *(2 pkt)*
Udowodnij, że dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^3+y^3 \ge x^2y+xy^2$.

I sposób rozwiązania
Nierówność $x^3+y^3 \ge x^2y+xy^2$ przekształcamy równoważnie, otrzymując kolejno
$$x^3+y^3-x^2y-xy^2 \ge 0,$$
$$\left(x^3-x^2y\right)+\left(y^3-xy^2\right) \ge 0,$$
$$x^2(x-y)-y^2(x-y) \ge 0,$$
$$(x-y)\left(x^2-y^2\right) \ge 0,$$
$$(x-y)^2(x+y) \ge 0,$$
Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż $(x-y)^2 \ge 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y oraz $x+y \ge 0$, gdyż liczby x i y są nieujemne. To kończy dowód.

II sposób rozwiązania
Nierówność $x^3+y^3 \ge x^2y+xy^2$ przekształcamy równoważnie, otrzymując kolejno
$$x^3+y^3-x^2y-xy^2 \ge 0,$$
$$\left(x^3+y^3\right)-\left(x^2y+xy^2\right) \ge 0,$$
$$(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)-xy(x+y) \ge 0,$$
$$(x+y)\left(x^2-xy+y^2-xy\right) \ge 0,$$
$$(x+y)\left(x^2-2xy+y^2\right) \ge 0,$$
$$(x+y)(x-y)^2 \ge 0.$$
Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż $(x-y)^2 \ge 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y oraz $x+y \ge 0$, gdyż liczby x i y są nieujemne. To kończy dowód.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy
- zapisze nierówność w postaci $(x-y)\left(x^2-y^2\right) \ge 0$

albo
- zapisze nierówność w postaci $(x+y)\left(x^2-2xy+y^2\right) \ge 0$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

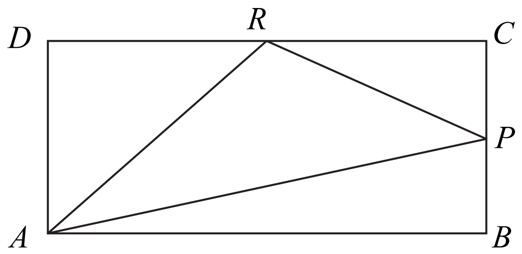
gdy uzasadni prawdziwość nierówności $x^3+y^3 \ge x^2y+xy^2$.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający przejdzie w swoim rozumowaniu z postaci $(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)-xy(x+y) \ge 0$ do postaci $x^2-xy+y^2-xy \ge 0$ bez zaznaczenia, że skoro x i y są nieujemne, to ich suma też jest nieujemna, ale dokona dzielenia obu stron nierówności przez $x+y$ i dalej przeprowadzi poprawne rozumowanie, to otrzymuje **1 punkt**.

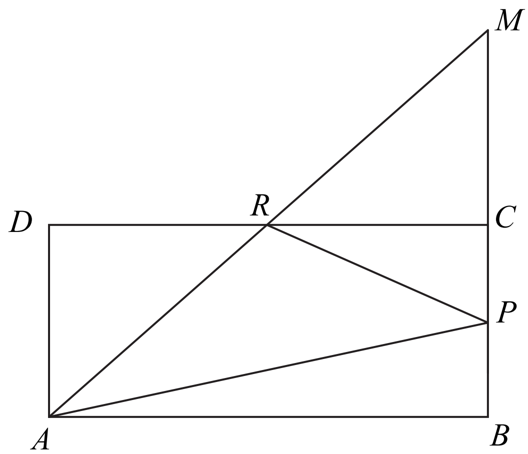
Zadanie 31. *(2 pkt)*

W prostokącie $ABCD$ punkt P jest środkiem boku BC, a punkt R jest środkiem boku CD. Wykaż, że pole trójkąta APR jest równe sumie pól trójkątów ADR oraz PCR.



I sposób rozwiązania

Przedłużamy prostą AR oraz bok prostokąta BC. Proste te przecinają się w punkcie M. Rozpatrujemy trójkąty ADR oraz RCM.



$|\sphericalangle ARD| = |\sphericalangle CRM|$ (kąty wierzchołkowe), kąty przy wierzchołkach D i C są proste oraz $|DR| = |RC|$, stąd na podstawie cechy przystawania trójkątów kbk wnioskujemy, że trójkąt ADR jest przystający do trójkąta RCM. Z przystawania trójkątów mamy $|AR| = |RM|$.

Pole trójkąta APR jest równe polu trójkąta RPM, ponieważ oba trójkąty mają równe podstawy ($|AR| = |RM|$) oraz taką samą wysokość poprowadzoną z wierzchołka P.

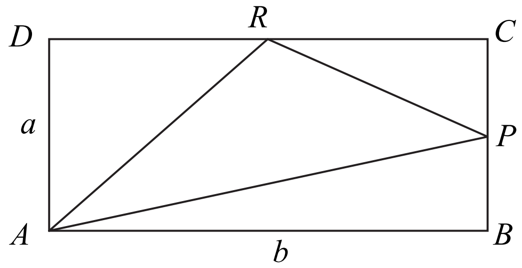
$P_{\Delta APR} = P_{\Delta RPM} = P_{\Delta PCR} + P_{\Delta RCM}$, a z faktu przystawania trójkątów RCM oraz ADR mamy: $P_{\Delta APR} = P_{\Delta PCR} + P_{\Delta ADR}$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze, że pole trójkąta APR jest równe polu trójkąta RPM i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

II sposób rozwiązania



Oznaczmy: $|AD| = a$ oraz $|AB| = b$, stąd $|BP| = |PC| = \frac{a}{2}$, $|CR| = |RD| = \frac{b}{2}$.

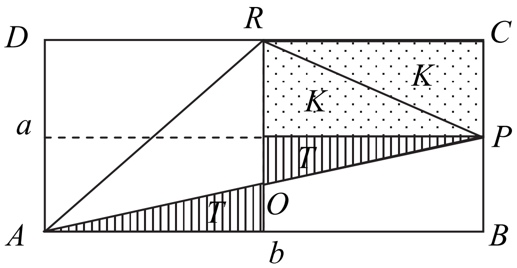
Obliczamy pola trójkątów prostokątnych *PCR*, *RDA*: $P_{\Delta PCR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{8}$ oraz $P_{\Delta RDA} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}$ zatem $P_{\Delta PCR} + P_{\Delta RDA} = \frac{ab}{8} + \frac{ab}{4} = \frac{3ab}{8}$.

Trójkąt *ABP* jest prostokątny i jego pole jest równe $\frac{1}{2} b \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{4}$.

Pole trójkąta *APR* jest różnicą pola prostokąta *ABCD* i sumy pól trzech trójkątów prostokątnych *ABP*, *PCR* oraz *RDA* zatem $P_{\Delta APR} = ab - \left(2 \cdot \frac{ab}{4} + \frac{ab}{8} \right) = \frac{3ab}{8}$.

Otrzymaliśmy równość $P_{\Delta APR} = P_{\Delta PCR} + P_{\Delta RDA}$.

III sposób rozwiązania



Podzielimy prostokąt *ABCD* na części, jak na rysunku.
Pole trójkąta *APR* zapisujemy w następujący sposób:
jest to suma pól trójkątów $K = \frac{1}{8} ab$, $T = \frac{1}{2} K = \frac{1}{16} ab$ oraz pola trójkąta *AOR*, którego pole jest równe: $P_{AOR} = \frac{1}{4} ab - T = \frac{1}{4} ab - \frac{1}{16} ab = \frac{3}{16} ab$.

Zapisujemy sumę: $P_{APR} = \frac{1}{8} ab + \frac{1}{16} ab + \frac{3}{16} ab = \frac{3}{8} ab$

Pole trójkąta *ARD* jest równe $2K = \frac{1}{4} ab$. Sumujemy pola trójkąta *ARD* oraz *PCR* i otrzymujemy: $P_{ARD} + P_{PCR} = \frac{1}{4} ab + \frac{1}{8} ab = \frac{3}{8} ab$, czyli wykazaliśmy, że $P_{ARD} + P_{PCR} = P_{APR}$.

Uwaga
Zamiast zapisywać pole prostokąta *ABCD* w zależności od długości boków możemy użyć innego oznaczenia, np. *P*, wtedy otrzymujemy: $K = \frac{1}{8} P$, $T = \frac{1}{16} P$, $P_{AOR} = \frac{3}{16} P$ i dalej

$P_{APR}=\frac{1}{8}P+\frac{1}{16}P+\frac{3}{16}P=\frac{3}{8}P$ oraz $P_{ARD}+P_{PCR}=\frac{1}{4}P+\frac{1}{8}P=\frac{3}{8}P$.

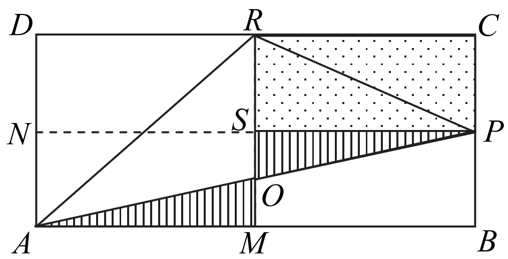
Schemat oceniania II i III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze, że pole trójkąta *APR* stanowi $\frac{3}{8}$ pola prostokąta *ABCD*, np. zapisze $P_{APR}=\frac{1}{8}ab+\frac{1}{16}ab+\frac{3}{16}ab=\frac{3}{8}ab$ lub $P_{\Delta APR}=ab-\left(2\cdot\frac{ab}{4}+\frac{ab}{8}\right)=\frac{3ab}{8}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

IV sposób rozwiązania

Poprowadźmy odcinki *PN* i *RM* łączące środki boków prostokąta. Niech *S* będzie punktem ich .przecięcia.



Trójkąty *ADR* i *RMA* są przystające, więc mają równe pola, trójkąty *PCR* i *RSP* też są przystające, więc ich pola też są równe, także trójkąty *AMO* i *PSO* są przystające, więc ich pola też są równe. Zatem

$$P_{ADR}+P_{PCR}=P_{AMR}+P_{RSP}=\left(P_{AOR}+P_{AMO}\right)+P_{RSP}=\left(P_{AOR}+P_{PSO}\right)+P_{RSP}=$$
$$=P_{AOR}+\left(P_{PSO}+P_{RSP}\right)=P_{AOR}+P_{OPR}=P_{APR}$$

co należało wykazać.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy ustali, że trójkąty *ADR* i *RMA* są przystające, trójkąty *PCR* i *RSP* są przystające oraz trójkąty *AMO* i *PSO* są przystające i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 32. *(4 pkt)*

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy $r\neq 0$ i pierwszym wyrazie $a_1=2$. Pierwszy, drugi i czwarty wyraz tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu geometrycznego.

I sposób rozwiązania

Ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy $a_2=a_1+r=2+r$ oraz $a_4=a_1+3r=2+3r$. Ciąg (a_1,a_2,a_4), czyli $(2,2+r,2+3r)$ jest geometryczny, więc z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie

$$(2+r)^2 = 2\cdot(2+3r),$$
$$4+4r+r^2 = 4+6r,$$
$$r^2-2r=0,$$
$$r(r-2)=0.$$

Stąd $r=0$ lub $r=2$. Jednak z założenia $r\neq 0$, więc $r=2$. Ciąg geometryczny ma postać $(2,2+2,2+3\cdot 2)=(2,4,8)$. Obliczamy iloraz tego ciągu: $q=\frac{4}{2}=2$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający
- zapisze wyrazy a_2 i a_4 w zależności od r (lub od a_1 i r), np.: $a_2=2+r$, $a_4=2+3r$ (lub $a_2=a_1+r$, $a_4=a_1+3r$)

albo
- zapisze zależność między wyrazami ciągu geometrycznego, np.: $a_1\cdot a_4=a_2^2$ (lub $2a_4=a_2^2$)

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze wyrazy a_2 i a_4 w zależności od r (lub od a_1 i r), np.: $a_2=2+r$, $a_4=2+3r$ (lub $a_2=a_1+r$, $a_4=a_1+3r$) oraz poda zależność między wyrazami ciągu geometrycznego, np.: $a_1\cdot a_4=a_2^2$ (lub $2a_4=a_2^2$) i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $(2+r)^2=2\cdot(2+3r)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający wyznaczy iloraz ciągu: $q=2$.

__**Uwaga**__
Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie $r=0$ lub $r=2$ i nie odrzuci $r=0$ i doprowadzi rozwiązanie konsekwentnie do końca, podając dwa ciągi geometryczne i dwie wartości ilorazu, to otrzymuje **3 punkty**.

II sposób rozwiązania

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_1,a_2,a_4). Zatem $a_2=a_1q=2q$ i $a_4=a_1q^2=2q^2$.
Liczby $a_1=2$, $a_2=2q$ i $a_4=2q^2$ to odpowiednio pierwszy, drugi i czwarty wyraz ciągu arytmetycznego, więc

$$3(a_2-a_1)=a_4-a_1,$$
$$3(2q-2)=2q^2-2,$$
$$3(q-1)=q^2-1,$$
$$3(q-1)=(q-1)(q+1).$$

Zauważmy, że $q\neq 1$, bo gdyby $q=1$, to ciąg (a_n) byłby stały, co jest niemożliwe, bo $r\neq 0$.
Dzieląc obie strony otrzymanego równania przez $q-1$ mamy

$$3 = q + 1,$$
$$q = 2.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający
- zapisze wyrazy a_2 i a_4 w zależności od q (lub od a_1 i q), np.: $a_2 = 2q$, $a_4 = 2q^2$ (lub $a_2 = a_1 q$, $a_4 = a_1 q^2$)

albo
- zapisze zależność między wyrazami ciągu arytmetycznego, np.: $3(a_2 - a_1) = a_4 - a_1$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze wyrazy a_2 i a_4 w zależności od q (lub od a_1 i q), np.: $a_2 = 2q$, $a_4 = 2q^2$ (lub $a_2 = a_1 q$, $a_4 = a_1 q^2$) oraz zapisze zależność między wyrazami ciągu arytmetycznego, np.: $3(a_2 - a_1) = a_4 - a_1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $3(2q - 2) = 2q^2 - 2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.
Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający wyznaczy iloraz ciągu: $q = 2$.

Zadanie 33. *(4 pkt)*

Wyznacz równanie osi symetrii trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, 2)$, $B = (6, -2)$, $C = (10, 6)$.

I sposób rozwiązania

Obliczamy długości boków trójkąta *ABC*: $|AB| = 4\sqrt{5}$, $|BC| = 4\sqrt{5}$, $|AC| = 4\sqrt{10}$.

Zauważamy, że jest to trójkąt równoramienny, w którym $|AB| = |BC| = 4\sqrt{5}$, więc osią symetrii trójkąta *ABC* jest symetralna odcinka *AC*. By znaleźć równanie osi symetrii trójkąta wyznaczamy współrzędne środka odcinka *AC*: $S = (4, 4)$.

Wyznaczamy równanie prostej *BS*, korzystając ze wzoru na prostą przechodząca przez dwa punkty:

$$y - 4 = \tfrac{-2-4}{6-4}(x - 4),$$
$$y = -3x + 16.$$

Odpowiedź: Równanie osi symetrii trójkąta *ABC* ma postać: $y = -3x + 16$.

II sposób rozwiązania

Obliczamy długości boków trójkąta *ABC*: $|AB| = 4\sqrt{5}$, $|BC| = 4\sqrt{5}$, $|AC| = 4\sqrt{10}$.

Zauważamy, że jest to trójkąt równoramienny, w którym $|AB| = |BC| = 4\sqrt{5}$, więc osią symetrii trójkąta *ABC* jest symetralna odcinka *AC*.

By znaleźć równanie osi symetrii trójkąta, wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AC: $a_{AC} = \frac{1}{3}$, a następnie współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do AC: $a = -\frac{1}{a_{AC}} = -3$.
Wyznaczamy równanie prostej zawierającej symetralną boku AC i przechodzącej przez punkt B:

$$y+2=-3(x-6),$$
$$y=-3x+16.$$

Odpowiedź: Równanie osi symetrii trójkąta ABC ma postać: $y=-3x+16$.

III sposób rozwiązania

Obliczamy długości boków trójkąta ABC: $|AB|=4\sqrt{5}$, $|BC|=4\sqrt{5}$, $|AC|=4\sqrt{10}$.

Zauważamy, że jest to trójkąt równoramienny, w którym $|AB|=|BC|=4\sqrt{5}$, więc osią symetrii trójkąta ABC jest symetralna odcinka AC. Zatem jego osią symetrii jest symetralna boku AC, będąca zbiorem punktów równo oddalonych od obu końców odcinka.
Niech $K(x,y)$ będzie punktem należącym do symetralnej boku AC. Zatem $|AK|=|KC|$.

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(10-x)^2+(6-y)^2},$$
$$x^2+4x+4+y^2-4y+4=100-20x+x^2+36-12y+y^2,$$
$$24x+8y-128=0,$$
$$3x+y-16=0,$$
$$y=-3x+16.$$

Odpowiedź: Równanie osi symetrii trójkąta ABC ma postać: $y=-3x+16$.

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający

- obliczy długości dwóch boków trójkąta ABC: $|AB|=4\sqrt{5}$, $|AC|=4\sqrt{10}$ i $|BC|=4\sqrt{5}$

albo

- obliczy współrzędne środka odcinka AC: $S=(4,4)$

albo

- obliczy współczynnik kierunkowy prostej AC: $a_{AC}=\frac{1}{3}$

albo

- obliczy współrzędne wektora AC

albo

- zapisze, że szukaną osią symetrii jest symetralna boku AC

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający

- obliczy współrzędne środka odcinka AC: $S=(4,4)$ i współczynnik kierunkowy prostej AC: $a_{AC}=\frac{1}{3}$

albo

- uzasadni, że szukaną osią symetrii jest symetralna boku AC

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Uwaga
Przyjmujemy, że jako uzasadnienie wystarczy rysunek w układzie współrzędnych.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający

- obliczy współrzędne środka odcinka AC: $S=(4,4)$ oraz współczynnik kierunkowy symetralnej boku AC: $a=-3$

albo

- obliczy współrzędne środka odcinka AC: $S=(4,4)$ oraz zapisze, że oś symetrii tego trójkąta przechodzi przez punkt B

albo

- obliczy współrzędne wektora AC oraz zapisze, że oś symetrii tego trójkąta przechodzi przez punkt B i jest prostopadła do wektora AC

albo

- zapisze równanie symetralnej boku AC: $\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(10-x)^2+(6-y)^2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

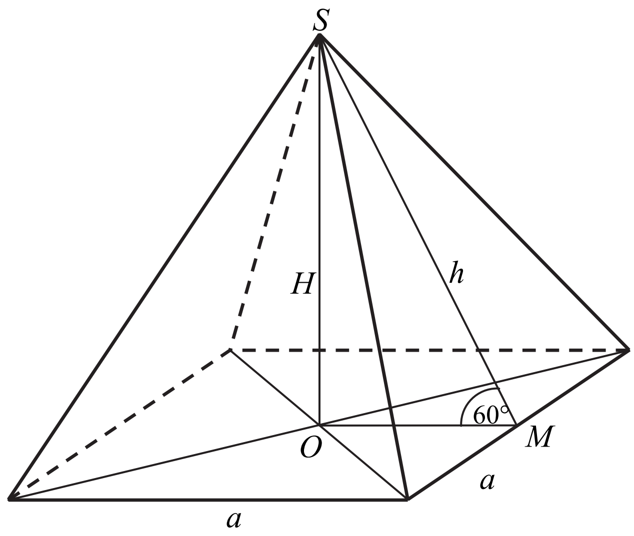
Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający wyznaczy równanie osi symetrii trójkąta ABC: $y=-3x+16$ ($3x+y-16=0$).

Uwaga
Jeżeli zdający nie uzasadni, że osią symetrii trójkąta ABC jest symetralna boku AC (np. nie sporządzi rysunku w układzie współrzędnych albo po wyznaczeniu równania symetralnej boku AC nie sprawdzi, że punkt B leży na tej symetralnej), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Zadanie 34. *(5 pkt)*
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ściana boczna o polu równym 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $60°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole jednej ściany bocznej jest równe 10, zatem $\frac{1}{2}ah=10$.

Cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $\cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{h}$.

Stąd

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}a}{h},$$
$$\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}a,$$
$$h = a.$$

Pole ściany bocznej jest równe $\frac{1}{2}a^2 = 10$. Zatem długość krawędzi podstawy jest równa $a = 2\sqrt{5}$. Obliczamy wysokość bryły, korzystając z tw. Pitagorasa.

$$H^2 + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = h^2,$$
$$H^2 = h^2 - \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2,$$
$$H^2 = 20 - 5,$$
$$H^2 = 15.$$

Zatem wysokość ostrosłupa jest równa $H = \sqrt{15}$.
Obliczamy objętość ostrosłupa

$$V = \frac{1}{3}P_pH = \frac{1}{3}\cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3}\cdot 20\cdot\sqrt{15} = \frac{20\sqrt{15}}{3}.$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{20\sqrt{15}}{3}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

- Zdający zapisze równanie: $\frac{1}{2}ah = 10$

albo

- zdający zapisze zależność: $\cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{h}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- zapisze układ równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ah = 10 \\ \cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{h} \end{cases}$$

albo

- zapisze równanie $\frac{1}{2}a^2 = 10$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający obliczy długość krawędzi podstawy lub wysokość ściany bocznej: $a = h = 2\sqrt{5}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 p.
Zdający
- obliczy wysokość ostrosłupa: $H = \sqrt{15}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo
- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu długości krawędzi podstawy lub wysokości ostrosłupa i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = \frac{20\sqrt{15}}{3}$.